

CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALES

On souhaite calculer une valeur approchée de $\int_a^b f$, où f est une fonction continue (ou continue par morceaux) sur le segment $[a, b]$.

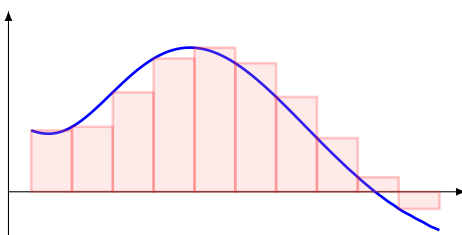
Les deux méthodes que nous allons voir utilisent le principe suivant :

- On découpe $[a, b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.
On pose donc $a_0 = a, a_1 = a + h, \dots, a_i = a + i \times h, \dots, a_n = a + n \times h = b$
- D'après la relation de Chasles, $\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f$
- On approche f sur chacun des segments $[a_i, a_{i+1}]$ par une fonction g_i telle que le calcul de $\int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i$ est aisé.

I. Méthode des rectangles

1) Principe

- Sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, on approche la fonction f par la fonction constante égale à $f(a_i)$.
- $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$ peut être approchée par $(a_{i+1} - a_i)f(a_i)$ i.e par $h \times f(a_i)$ (aire du rectangle de base h et de hauteur $f(a_i)$).
- En sommant, on obtient $h \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$.



2) Convergence

Théorème : Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$

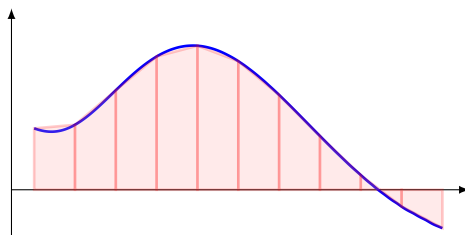
3) Implémentation

```
def rectangles(f,a,b,n):
    r = 0 # somme des aires des rectangles
    h = (b-a)/n # pas
    for i in range(n):
        r = r + h * f(a + i*h)
    return r
```

II. Méthode des trapèzes

1) Principe

- Sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, on approche la fonction f par une fonction affine g_i coïncidant avec f en a_i et en a_{i+1} .
- $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$ peut être approchée par $h \times \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$ (aire du trapèze de hauteur h et de bases $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$).
- En sommant, on obtient $h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$.



2) Convergence

Posons $R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$ et $T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$. Alors $T_n = R_n + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a))$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \int_a^b f$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_a^b f$.

3) Implémentation

```
def trapezes(f,a,b,n):
    t = 0 # somme des aires des rectangles
    h = (b-a)/n # pas
    for i in range(n):
        t = t + h * (f(a+i*h) + f(a+(i+1)*h))/2
    return t
```

III. Comparaison des deux méthodes

1) Majoration de l'erreur

On peut démontrer les résultats suivants (qui ne sont pas à connaître par cœur!) :

Théorème :

- Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $\left| \int_a^b f(t)dt - R_n \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$ où $M_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$
- Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, alors : $\left| \int_a^b f(t)dt - T_n \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$ où $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$

La méthode des trapèzes converge donc plus rapidement que la méthode des rectangles en général.

2) Exemples

